Type Systems and Programming Languages, 12 章

坂本 崇裕

2001 年 5 月 21 日

12 Normalization

この章では simply typed lambda-calculus の基本的な性質: “well-typed なプログラムは有限回のステップで停止する” すなわち “すべての well-typed な term は正規化可能” であることについて述べる. この性質は一般のプログラム言語では “general recursion” や “recursive types” 等で終了しないプログラムを記述できるようになっているため成り立たないが, 後に出てくる System F の話や typechecking アルゴリズムが停止することに非常に関わりがある.

ここで正規化の証明の話をするもうひとつの理由としては, この証明が logical relations という基本的証明技法を用いた非常に綺麗なサンプルであることもあげられる.

12.1 Normalization for Simple Types

1 種類の base type `A` を持つ simply typed lambda-calculus について考える. ここで重要なのは帰納法による証明に必要な十分に強い帰納法の仮定を見つけることである. そこで証明に先立ち, `T` の型を持つ closed term の集合 $R_{\mathtt{T}}$ を定義する. また $\mathtt{t} \in R_{\mathtt{T}}$ のかわりに $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t})$ とも書くこととする.

定義 12.1.2

- $R_{\mathtt{A}}(\mathtt{t})$ iff `t` halts.
- $R_{\mathtt{T}_1 \to \mathtt{T}_2}(\mathtt{t})$ iff `t` halts and, whenever $R_{\mathtt{T}_1}(\mathtt{s})$, we have $R_{\mathtt{T}_2}(\mathtt{ts})$.

この定義は強い帰納法の仮定を与えている. 最終目的は全プログラム, すなわち任意の closed terms が停止することを示すことであるが closed terms の中には関数形式の subterm が存在しうる. それら subterms が停止することを示すだけでは不十分である. なぜなら正規化された引数への正規化された関数の適用は代入を引き起こすが, これはより多くの評価ステップを必要とするかもしれないからだ. そこで関数に関してはより強い条件を設けている. すなわち単にそれ自身が停止するだけではなく, 停止する引数に適用された場合は出力される結果は停止するものであるべしという条件を加えている.

この定義を正規化の証明のために 2 ステップに分けて使用する. 最初に任意の $R_{\mathtt{T}}$ における任意の要素が正規化可能であることを見る. 次に任意の well-typed term : `T` が対応する $R_{\mathtt{T}}$ の要素であることを示す.

補題 12.1.3 If $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t})$, then `t` halts.

証明. これは $R_{\mathtt{T}}$ の定義からすぐに導かれる.

2 個目のステップはさらに 2 つの補題に分けて考える．その 1 つめとして, $R_{\mathtt{T}}$ に含まれるかどうかは評価によって変わることの無いことを示す.

補題 12.1.4 If $\mathtt{t} : \mathtt{T}$ and $\mathtt{t} \to \mathtt{t'}$, then $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t})$ iff $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t'})$

証明. $\mathtt{T}$ の構造に関する帰納法による．まず $\mathtt{t}$ halts iff $\mathtt{t'}$ halts は明らかである.

もし $\mathtt{T} = \mathtt{A}$ であればこれ以上示すことは無い.

一方 $\mathtt{T} = \mathtt{T}_1 \to \mathtt{T}_2$ であるとする．右方向の証明. $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t})$ と $R_{\mathtt{T}_1}(\mathtt{s})$ を任意の $\mathtt{s}$ で仮定したとき, $R_{\mathtt{T}}$ の定義から $R_{\mathtt{T}_2}(\mathtt{t\ s})$. ここで $subterm : \mathtt{T}_2$ に対しては題意を仮定できることから $\mathtt{t\ s} \to \mathtt{t'\ s}$ であり $R_{\mathtt{T}_2}(\mathtt{t'\ s})$. これが任意の $\mathtt{s}$ で成り立つことと $R_{\mathtt{T}}$ の定義から $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t'})$ を得る．逆方向も同様の議論.

次に $\mathtt{T}$ の全 term が $R_{\mathtt{T}}$ に属することを示す．ここでは型の導出に関する帰納法で証明を行う．その際に問題となるのは λ-抽象 の場合である．例えば $R_{\mathtt{T}_1 \to \mathtt{T}_2}(\lambda \mathtt{x} : \mathtt{T}_1 . \mathtt{t}_2)$ を示すとき, $R_{\mathtt{T}_2}(\mathtt{t}_2)$ という仮定を使用して証明を進めたいところであるが, $R_{\mathtt{T}_2}$ は closed term の集合として定義されているにも関わらず $\mathtt{x}$ が free であるのが問題となる.

この問題は帰納の仮定を一般化することで解決される．Closed term に限定して題意を証明するのではなく, open term $\mathtt{t}$ の全ての closed instances をカバーするように題意を一般化する.

補題 12.1.5 If $\mathtt{x}_1 : \mathtt{T}_1, \ldots, \mathtt{x}_n : \mathtt{T}_n \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ and $\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n$ are closed values of types $\mathtt{T}_1 \ldots \mathtt{T}_n$ with $R_{\mathtt{T}_i}(\mathtt{v}_i)$ for each i, then $R_{\mathtt{T}}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t})$.

証明. $\mathtt{x}_1 : \mathtt{T}_1, \ldots, \mathtt{x}_n : \mathtt{T}_n \vdash \mathtt{t} : \mathtt{T}$ における導出に関する帰納法による.

Case T-VAR:

$$\mathtt{t} = \mathtt{x}_i \quad \mathtt{T} = \mathtt{T}_i$$

$[\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t} = \mathtt{v}_i$ かつ $\mathtt{T} = \mathtt{T}_i$ なので $R_{\mathtt{T}_i}(\mathtt{v}_i)$ より $R_{\mathtt{T}}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t})$.

Case T-ABS:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{t} = \lambda \mathtt{x} : \mathtt{S}_1 . \mathtt{s}_2 \\
&\mathtt{x}_1 : \mathtt{T}_1, \ldots, \mathtt{x}_n : \mathtt{T}_n, \mathtt{x} : \mathtt{S} \vdash \mathtt{s}_2 : \mathtt{S}_2 \\
&\mathtt{T} = \mathtt{S}_1 \to \mathtt{S}_2
\end{aligned}$$

$[\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t}$ は停止する．なぜならそれ自身すでに value であるからである．従って示さないといけないことは, $R_{\mathtt{S}_1}(\mathtt{s})$ なる任意の $\mathtt{s} : \mathtt{S}_1$ で $R_{\mathtt{S}_2}(([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t})\mathtt{s})$ が成り立つということである.

$\mathtt{s}$ をそのような term とする．補題 12.1.3 より $\mathtt{s} \to^* \mathtt{v}$ なる $\mathtt{v}$ が存在する．補題 12.1.4 より $R_{\mathtt{S}_1}(\mathtt{v})$. そうすると $\mathtt{s}_2$ に関して帰納法の仮定から $R_{\mathtt{S}_2}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n][\mathtt{x} \mapsto \mathtt{v}]\mathtt{s}_2)$ が成立することになっている．しかしここで

$$\begin{aligned}
&(\lambda \mathtt{x} : \mathtt{S}_1 . [\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{s}_2)\mathtt{s} \\
\to^* \quad &[\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n][\mathtt{x} \mapsto \mathtt{v}]\mathtt{s}_2
\end{aligned}$$

であることと補題 12.1.4 から

$$R_{\mathtt{S}_2}((\lambda \mathtt{x} : \mathtt{S}_1 . [\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{s}_2)\mathtt{s})$$

すなわち

$$R_{\mathtt{S}_2}(([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1] \cdots [\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n](\lambda \mathtt{x} : \mathtt{S}_1 . \mathtt{s}_2))\mathtt{s})$$

となるが, これが任意の $\mathtt{s}$ で整理するので

$$R_{\mathtt{S}_1\to\mathtt{S}_2}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n](\lambda\mathtt{x}:\mathtt{S}_1.\mathtt{s}_2))$$

が言えて題意は満たされる.

Case T-APP:

$$\begin{aligned}&\mathtt{t} = \mathtt{t}_1\mathtt{t}_2\\&\mathtt{x}_1:\mathtt{T}_1,\ldots,\mathtt{x}_n:\mathtt{T}_n \vdash \mathtt{t}_1:\mathtt{T}_{11}\to\mathtt{T}_{12}\\&\mathtt{x}_1:\mathtt{T}_1,\ldots,\mathtt{x}_n:\mathtt{T}_n \vdash \mathtt{t}_2:\mathtt{T}_{11}\\&\mathtt{T}:\mathtt{T}_{12}\end{aligned}$$

$\mathtt{t}_1$および $\mathtt{t}_2$ に関して帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}R_{\mathtt{T}_{11}\to\mathtt{T}_{12}}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t}_1)\\R_{\mathtt{T}_{11}}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t}_2)\end{aligned}$$

がいえるが, ここで $R_{\mathtt{T}_{11}\to\mathtt{T}_{12}}$ の定義より

$$R_{\mathtt{T}_{12}}(([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t}_1)([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n]\mathtt{t}_2))$$

すなわち

$$R_{\mathtt{T}_{12}}([\mathtt{x}_1 \mapsto \mathtt{v}_1]\cdots[\mathtt{x}_n \mapsto \mathtt{v}_n](\mathtt{t}_1\mathtt{t}_2))$$

が言えて題意が満たされる.

以上より補題 12.1.5 は示された.

定理 12.1.6 If $\vdash \mathtt{t}:\mathtt{T}$, then $\mathtt{t}$ is normalizable.

証明. 補題 12.1.5 より $R_{\mathtt{T}}(\mathtt{t})$, すると補題 12.1.3 から $\mathtt{t}$ は正規化可能.